Probabilités

Mounir Bezzarga

Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis
Diapo 1

Probabilités

(D) Denombrabilité:

E un ensemble quelconque est dit denombrable si E est en bijection avec $\mathbb{N}$.
(E) $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont denombrables.
$. \longleftrightarrow .$
$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
$\mathfrak{p} \to 2p$ si p est positive
$\mathfrak{p} \to -2p + 1$ si p est strictement negatif

$$\varphi \text{ est bejective}$$

N.B
A et B denombrables alors $A \times B$ denombrables.
$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$
$x \in \mathbb{Q}; \exists p \in \mathbb{Z},\ \exists q \in \mathbb{N}^* / x = \frac{p}{q}$

$$p \wedge q = 1$$

(D) Au plus Denombrable:

E est dit au plus denombrables si E est fini ou denombrable

I- Tribu des Evenements:

- "Ω" : un ensemble de possibles: Univers
-A un événement si $A \subset \Omega$.
-$\tau \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

(D) Tribu:

Soit Ω denombrable

$$\tau \subset P(\Omega) \text{ est dite tribu}$$

(i) $\Omega \subset \tau$
(2i) $A \in \tau \Longrightarrow \overline{A} := A^c \in \tau$
(3i) $(A_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau.$

N.B

(i) $\phi \in \tau.$ ((i) et (2i))
(2i) $(A_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau.$ ((3i) et (2i))

$\longleftrightarrow$

$$(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$$

$$A_n \in \tau \Longrightarrow A_n^c \in \tau \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \tau$$

$$\Rightarrow (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \tau \overset{(2i)}{\Longrightarrow} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau$$

(D) Probabilité:
(Ω, τ) un espace probabilisable. On appelle probabilité sur (Ω, τ) toute application $p : \tau \to [0, 1]$ vérifiant:
(i) $p(\Omega) = 1$
(2i) $(A_n) \in \tau^N$ au plus denombrable tel que $A_n \cap A_m = \varnothing \quad \forall n \neq m$ (deux à deux incompatibles) $\Longrightarrow p(\bigcup_n A_n) = \sum_n p(A_n)$.

On appelle alors: (Ω, τ, p): espace probabilisé.

(T) Limite monotone: (Ω, τ, p) espace probabilisé. Soit $(A_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}}$ croissante pour l'inclusion alors

$$\lim_{n \to \infty} p(A_n) = p(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$$

Preuve:

• $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ $(A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n)$

• $A_n \subset A_{n+1} \Longrightarrow p(A_n) \leq p(A_{n+1})$

en effet

$$A_{n+1} = A_n \cup (A_{n+1} \backslash A_n)$$
$$\Longrightarrow p(A_{n+1}) = p(A_n) + \underbrace{p(A_{n+1} \backslash A_n)}_{\in [0,1]}$$
$$\Longrightarrow p(A_{n+1}) \geq p(A_n)$$
$$\Longrightarrow (p(A_n))_n \nearrow \text{ majorée par 1 et donc converge.}$$

• Soit

$$\begin{aligned} A'_n &= A_n \backslash \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \\ &= A_n \setminus A_{n-1} \end{aligned}$$

$A'_n \bigcap A'_m = \varnothing$ si $n \neq m$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n) = p(A_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{p(A'_n)}_{p(A_n)-p(A_{n-1})}$$

$$\begin{aligned}
p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(p(A_n) - p(A_{n-1})\Big) + p(A_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \Big(p(A_n) - p(A_{n-1})\Big) + p(A_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} p(A_n) - p(A_0) + p(A_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} p(A_n)
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} p(A_n) = p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$

(C) Limite decroissante:

$(A_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}}$ decroissante pour l'inclusion. Alors $(p(A_n))_n$ converge et on a:

$$\lim_{n\to\infty} p(A_n) = p(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$

Preuve:

$\Omega = A_n \cup A_n^c \Longrightarrow 1 = p(A_n) + p(A_n^c)$

$A_{n+1} \subset A_n$

$A_n^c \subset A_{n+1}^c$

$(A_n^c)_n$ suite croissante de τ, $(p(A_n^c))_n$ converge et on a:

$$\lim_{n\to\infty} p(A_n^c) = p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c)$$

$$\exists \lim_n (1 - p(A_n)) \in [0,1]$$

$$\exists \lim_n p(A_n) \in [0,1]$$

$$\begin{aligned} \lim_n (1 - p(A_n)) &= p((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c) \\ &= 1 - p(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \\ \Longrightarrow \lim_n p(A_n) &= p(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \end{aligned}$$

N.B.

$(A_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}} \Longrightarrow p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$

$$A'_n = A_n \setminus \overleftrightarrow{\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*$$
$$A'_0 = A_0$$
$$\Longrightarrow A'_n \bigcap A'_m = \varnothing \text{ si } n \neq m$$

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$

$$p(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = p(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A'_n)$$

$$\text{or } A'_n \subset A_n \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} p(A'_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$$

Alors

$$p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$$

(D) Probabilité conditionnelle: (Ω, τ, p) est un espace probabilisé, $A \in \tau / p(A) > 0$.

$$p_A(B) = p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

L'application : $p_A : \tau \to [0,1]$, est une probabilité dite probabilité conditionnelle relativement à A.

(i) $p_A(\Omega) = \frac{p(A \cap \Omega)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$

(2i) $(A_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}}, A_n \cap A_m = \varnothing$ si $n \neq m$

$$\Downarrow$$

$$(A \cap A_n) \cap (A \cap A_m) = \varnothing \text{ si } n \neq m$$

(3i) $p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(A \cap A_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A \cap A_n)$

$$\longleftrightarrow$$

$$P_A(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \frac{p(A \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} A_n))}{p(A)} = \frac{p(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty}(A \cap A_n))}{p(A)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p(A \cap A_n)}{p(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_A(A_n) \text{ c.q.p.c}$$

N.B

$$p(\overline{B}|A) = 1 - p(B|A)$$
$$p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$$
$$p(B|A) + p(B|\overline{A}) = ??$$

(D) Formule composé de Probabilités

$$\begin{aligned}
\bullet\ p_A(B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \\
&\Downarrow \\
p(A \cap B) &= p(A).p(B|A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ p(A \cap B \cap C) &= p(A)\ p(B \cap C|A) \\
&= p(A)p_A(B \cap C) \\
&= p(A).p_A(B).p_A(C|B) \\
&= p(A).p(B|A).p_A(C|A \cap B)
\end{aligned}$$

(D) Formule de Probabilités totales:

$$(A_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}} / \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega; A_n \cap A_m = \varnothing \text{ si } n \neq m$$
$$\text{avec } p(A_n) > 0; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$p(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n).p(B|A_n)$$

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega = B \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \\ &= \cup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n) \end{aligned}$$

$$(B \cap A_n) \cap (B \cap A_m) = \varnothing \text{ si } n \neq m$$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(\cap A_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(B \cap A_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n).p(B|A_n) \quad \text{(Formule composé de Probabilités)} \end{aligned}$$

(D) Formule de Boyes:

$(A_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}} / \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega;\ A_n \cap A_m = \varnothing$ si $n \neq m$

$$p(A_n) > 0$$

soit $B \in \tau / p(B) > 0$. Alors:

$$p(A_m|B) = \frac{p(A_m).p(B|A_m)}{\sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n).p(B|A_n)}$$

Preuve:

$(p(A_m) > 0; p(B) > 0)$

$$\begin{aligned} p(A_m \cap B) &= p(A_m).p(B|A_m) \\ &= p(B).p(A_m|B) \\ p(A_m).p(B|A_m) &= p(B).p(A_m|B) \\ p(A_m|B) &= \frac{p(A_m).p(B|A_m)}{p(B)} \end{aligned}$$

or d'après la formule de probabilités totals on aura

$$p(A_m|B) = \frac{p(A_m).p(B|A_m)}{\sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n).p(B|A_n)} \quad \text{c.q.p.c}$$

Indépendance en probabilités:

(D) Événements Indépendants:

$A, B \in \tau$ sont indépendants si:

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A).p(B)$$

N.B Si $A, B \in \tau$ indépendants tel que $p(A) > 0$ et $p(B) > 0$, alors:

$$p(A|B) = p(A)$$

$$p(B|A) = p(B)$$

En effet:

$$p(A|B) = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A).p(B)}{p(B)} = p(A)$$

Soit $A, B \in \tau$ indépendants. Alors:

(i) A et $\overline{B} = B^c$ sont indépendants.

(2i) $\overline{A}$ et B sont indépendants.

(3i) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Preuve:

(i)

$$\begin{aligned} p(A).p(\overline{B}) &= p(A) \times (1 - p(B)) \\ &= p(A) - p(A).p(B) \\ &= p(A) - p(A \cap B) \\ &= p(A|(A \cap B)) \\ &= p(A \cap B^c) \\ &= p(A \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

Alors A et B indépendants.

(3i) A et $\overline{B}$ indépendants
$\Downarrow (i)$
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.

(2i) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants
$\Downarrow (i)$
$\overline{A}$ et $\overline{\overline{B}}$ indépendants
$\Downarrow$
$\overline{A}$ et B indépendants.

(D) Independance mutuelle de n évenements:

Soit $A_1; ....; A_n \in \tau$ des évenements. On dit que $A_1; ....; A_n$ sont mutuellement indépendants si $\forall J \subset \{1; ....; n\}$. On a:

$$p(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} p(A_j).$$

$A \cap B \cap C = \varnothing$ malgré

$$A \cap B \neq \varnothing$$

$$A \cap C \neq \varnothing$$

$$B \cap C \neq \varnothing$$

N.B: Il arrive que 3 évenements A, B, C soient deux à deux indépendants Alors que A, B, C ne le sont pas. cas oú $A \cap B = \varnothing$.

Probabilités: Exercices:

Exercice 1:

Sur un stock de 100 dés, 25 sont pipés. La probabilité d'obtenir 6 sur un dé pipé est $\frac{1}{2}$.

1/ On choisit un dé, on le lance et on obtient 6. Quel est la probabilité que ce dé soit pipé?

- σ_1 : "obtenir 6 ou première lancé"
- P : "le dé est pipé"

$$
\begin{aligned}
p(P) &= \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\
p(\sigma_1|P) &= \frac{1}{2} \\
p(P|\sigma_1) &= \frac{p(P).p(\sigma_1|P)}{p(P).p(\sigma_1|P) + p(\overline{P}).p(\sigma_1|\overline{P})} \\
&= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$p(P|\sigma_1) = \frac{1}{2}$$

2/ On relance le dé et on obtient à nauveau 6. Quel est la probabilité que le dé soit pipé?

- σ_2 : "obtenir 6 ou deuxième lancé"

$$
\begin{aligned}
p(P|\sigma_1 \cap \sigma_2) &= \frac{p(P).p(\sigma_1 \cap \sigma_2 \backslash P)}{p(P).p(\sigma_1 \cap \sigma_2|P) + p(\overline{P}).p(\sigma_1 \cap \sigma_2|\overline{P})} \\
&= \frac{\frac{1}{4} \times (\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4} \times (\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \times (\frac{1}{6})^2}
\end{aligned}
$$

$$p(P|\sigma_1 \cap \sigma_2) = \frac{3}{4}$$

Exercice 2:

Dans une urne U_1 sont deposées b_1 boules blanches et n_1 boules noirs. Dans une urne U_2 sont deposées b_2 boules blanches et n_2 boules noirs .
- On prélève une boule de U_1 et on remet dans U_2: puis on tire une boule dans U_2 et on constate qu'elle est blanche.
Quelle est la probabilité que la première boule l'est aussi?

Solution

- σ_1 : "obtenir une boule blanche au première tirage de U_1
- A : "obtenir une boule blanche au deuxième tirage de U_2

$$\begin{aligned} p(\sigma_1) &= \frac{b_1}{b_1 + n_1} \\ p(A|\sigma_1) &= \frac{b_2 + 1}{b_2 + n_2 + 1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p(\sigma_1|A) &= \frac{p(\sigma_1).p(A|\sigma_1)}{p(\sigma_1).p(A|\sigma_1) + p(\overline{\sigma_1}).p(A|\overline{\sigma_1})} \\
&= \frac{\frac{b_1}{b_1+n_1} \times \frac{b_2+1}{b_2+n_2+1}}{\frac{b_1}{b_1+n_1} \times \frac{b_2+1}{b_2+n_2+1} + \frac{n_1}{b_1+n_1} \times \frac{b_2}{b_2+n_2+1}} \\
&= \frac{b_1(b_2+1)}{b_1(b_2+1) + n_1 b_2}
\end{aligned}
$$

Exercice 3:

Des personnes $A_1, \ldots\ldots, A_n$ se communiquent successivement une information du type Vrai-Faux.
Chaque A_k transmet l'information à A_{k+1}; $k \in [|1, n-1|]$ de façon correcte avec la probabilité ($\alpha \in]0, 1[$). En la transformant en son contraire avec la probabilité $(1-\alpha)$.
Calculer P_n probabilité pour que l'information reçu par A_n soit celle qui a été émise par A_1. Puis calculer $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$?

Solution:

$$A_k \hookrightarrow A_{k+1}$$

$$\text{Information: } \begin{cases} \alpha, & \text{si l'information "Vraie",} \\ (1-\alpha), & \text{si l'information "Fausse".} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{n+1} = \alpha P_n + (1-\alpha)(1-P_n) \\ P_1 = 1 \end{cases}$$

$P_n = (2\alpha - 1)P_n + 1 - \alpha$

Methode: on pose $V_n = P_n - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ et on trouve λ de sorte que (V_n) soit geométrique.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= P_{n+1} - \lambda = (2\alpha-1)P_n + 1 - \alpha - \lambda \\ &= (2\alpha-1)\left(P_n + \frac{1-\alpha-\lambda}{2\alpha-1}\right) \\ &= (2\alpha-1)V_n \text{ ssi } \lambda = \frac{\lambda+\alpha-1}{2\alpha-1}, \quad (si\ \alpha \neq \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

ssi

$$\lambda(2\alpha - 1) = \lambda + \alpha - 1$$

ssi

$$\lambda = \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow V_n = P_n - \frac{1}{2}$ défini une S.G de raison $q = 2\alpha - 1$

$$\begin{aligned} V_n &= q^{n-1}.V_1 = (2\alpha - 1)^{n-1}(P_1 - \frac{1}{2}) \\ P_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}(2\alpha - 1)^{n-1} \\ P_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\alpha - 1)^{n-1} = \frac{1 + (2\alpha - 1)^{n-1}}{2} \end{aligned}$$

d'où: $P_n = \frac{1+(2\alpha-1)^{n-1}}{2}$; $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow |2\alpha - 1| < 1$$

$$\Rightarrow (2\alpha - 1)^{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4:

On dispose de $N+1$ urnes numérotés de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit au hazard d'une urne et on tire n fois de suite une boule avec remise après chaque tirage.

Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche sachant que, au cours des n premiers, seules des boules blanches ont été tirées?

Soit U_k :"on choisit l'urne numero k"; $0 \leq k \leq N$

B_n : "tirer n boules blanches d'affilée"

Dans une urne U_k on a k boules blanches et $(N-k)$ boules Noire

$$\begin{aligned} p(B_n|U_k) &= (\frac{C_k^1}{C_N^1})^n = (\frac{k}{N})^n \\ p(B_n) &= \sum_{k=0}^{N} p(U_k).p(B_n|U_k) \end{aligned}$$

or $p(U_i) = p(U_j)\ \forall i \neq j$ avec$0 < i < j \leq N$, d'ou:

$$\begin{aligned} p(B_n) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1}.(\frac{k}{N})^n \\ &= \frac{1}{N+1}.\sum_{k=1}^{N}(\frac{k}{N})^n \end{aligned}$$

$$p(B_{n+1}|B_n) = \frac{p(B_{n+1} \cap B_n)}{p(B_n)}$$

Or $B_{n+1} \subset B_n \Rightarrow B_{n+1} \cap B_n = B_{n+1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad p(B_{n+1}|B_n) &= \frac{p(B_{n+1})}{p(B_n)} \\ &= \frac{\frac{1}{N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} (\frac{k}{N})^{n+1}}{\frac{1}{N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} (\frac{k}{N})^{n}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{N} (\frac{k}{N})^{n+1}}{\sum_{k=1}^{N} (\frac{k}{N})^{n}} \end{aligned}$$

2) Calculer la limite de cette probabilité lorsque $N \to +\infty$.

$$\begin{aligned} p(B_n) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} (\frac{k}{N})^n \\ &= \frac{N}{N+1} \cdot (\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (\frac{k}{N})^n + \frac{1}{N}) \end{aligned}$$

Démonstration:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{k}{N})^n = \frac{1}{N}.\sum_{k=0}^{N-1}(0+k.\frac{1-0}{N})^n$$

soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$t \to t^n$ et alors

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{k}{N})^n = \frac{1}{N}.\sum_{k=0}^{N-1}f(0+k.\frac{1-0}{N})$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{k}{N})^n = \int_0^1 t^n.dt = \frac{1}{n+1}.$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} p(B_n) = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} p(B_{n+1}|B_n) = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

Exercice 5:(TD)

Soit $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\xi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*; P\{n\} = \frac{\lambda}{n^s}$.
soit $\diamond$ $\Omega = \mathbb{N}^*$ l'univers
$\diamond$ $\tau = \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu
$\diamond$ $P : \tau \to [0,1]$
$\{n\} \to p\{n\} = \frac{\lambda}{n^*}$
1/ pour que P définit une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, P(\mathbb{N}^*))$ il faut que P arrive dans $[0,1]$.
$p(\{1\}) = \lambda \in [0,1]$.
C.N $\lambda \in [0,1]$.
P est une probabilité sur (Ω, τ)

$$\Rightarrow P(\Omega) = P(\mathbb{N}^*) = 1.$$

$$\text{i.e} \sum_{n=1}^{+\infty} P(n) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n^s} = 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n^s} = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\xi(s)}$$

Réciproquement:

$\Omega = \mathbb{N}^*;\ \tau = \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$

$\xi(s) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \geq 1$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\xi(s)} \in [0,1]$

Ainsi choisi

$\forall (A_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}};\ A_n \cap A_m = \varnothing\ \forall n \neq m$. On a

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) &= \sum_{k \in \cup_{n=0}^{+\infty} A_n} P(\{k\}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k \in A_n} P(\{k\}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

Alors p est une probabilité sur (Ω, τ) i.e $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p) = (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), p)$ est un espace probabilisé.

2/ • $B_n = \{n\}$; $n \in \mathbb{N}^*$
• $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N}^* / p \text{ premier}\}$
• $A_n = \{n \in \mathbb{N}^* / p|_n\}$;

$$\begin{aligned}
P(A_p) &= P\{n \in \mathbb{N}^* / \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ avec } n = kp\} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p(\{kp\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(kp)^s} = \frac{\lambda}{p^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \\
&= \frac{\lambda \xi(s)}{p^s} = \frac{1}{p^s} \\
\Rightarrow P(A_p) &= \frac{1}{p^s}.
\end{aligned}$$

3/ $p_1 < p_2 < ... < p_m$ suite finie de nombres premiers, on montrera que :

$$P(A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap ... A_{p_m}) = \prod_{k=1}^{m} P(A_{p_k})$$

$p_1; p_2; \ldots; p_m | n \Leftrightarrow \; p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_m | n$
$n \in A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots . \cap A_{p_m}$
équivalent à $n \in A_{p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_m}$

$$A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots . \cap A_{p_m} = A_{p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_m}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \; P(A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots . \cap A_{p_m}) &= P(A_{p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_m}) \\
&= P(x.\mathbb{N}^*) \;\; \text{où } x = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_m \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{x.k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(xk)^s} = \frac{\lambda}{x^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \\
&= \frac{\lambda}{x^s} \xi(1) = \frac{1}{x^s} = \frac{1}{p_1^s} \times \frac{1}{p_2^s} \times \ldots\ldots \times \frac{1}{p_m^s} \\
&= P(A_{p_1}).P(A_{p_2}).\ldots\ldots P(A_{p_m})
\end{aligned}$$

d'où

$$P(A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots . \cap A_{p_m}) = \prod_{k=1}^{m} P(A_{p_k})$$

On conclut alors que $(A_p)_{p \in \mathbb{P}}$ est un système mutuellement indépendant d'évènements.

4/ On chosse les nombres premiers:

$$p_1 < ... < p_m < .. < .. <$$

en ordre croissant

$$\mathbb{P} = \{p_1, ..., p_m, ...\}$$

$$E_m = \bigcap_{k=1}^{m} \overline{A}_{p_k} \supset E_{m+1} \text{car } E_{m+1} = E_m \cap \overline{A}_{p_{m+1}}$$

$\Rightarrow$ $(E_m)_m$ suite decroissante pour l'inclusion.
$E = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} \overline{A}_p = \bigcap_{m=0}^{+\infty} E_m$
$n \in E \Leftrightarrow$ n n'est pas divisible par p $\forall p \in \mathbb{P} \Leftrightarrow$ $n = 1$
d'où $E = \{1\}$.

5/ $(E_m) \searrow$ d'évènements d'après le théorème de la limite décroissante on a:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} P(E_m) &= P(\bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} E_m) = P(E) \\
&= \lambda = \frac{1}{\xi(s)} \\
\Rightarrow \frac{1}{\xi(s)} &= \lim_{m\to\infty} P(E_m) \\
&= \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=1}^{m} \overline{A_{p_k}}) \\
\Rightarrow \frac{1}{\xi(s)} &= \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} P(\overline{A_{p_k}})
\end{aligned}$$

(car si $(A_p)_{p\in\mathbb{P}}$ est mutuellement independants $\Rightarrow (\overline{A_p})_{p\in\mathbb{P}}$ est mutuellement independants)

$$
\begin{aligned}
& = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} (1 - p(A_{p_k})) \\
\Rightarrow \ \xi(s) & = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{(1-\frac{1}{p_k^s})} = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{p_k^s})} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{(1-\frac{1}{p^s})}
\end{aligned}
$$

Exercice 4: TD:

1/ $(A_n)_n$ suite d'évènements 2 à 2 incompatibles d'une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montre que $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$?

$(A_n)_n$ 2 à 2 incompatibles

$$\Rightarrow P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \Omega \Rightarrow \ P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq 1$$

$$\sum P(A_n) \longrightarrow P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

2/ $(A_n)_n$ une suite d'évènements mutuellement independants

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= 1 - P((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c) \\ &= 1 - P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c) \\ &= 1 - P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) \end{aligned}$$

On considère $B_n := \bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow (B_n)_n$ decroissante pour l'inclusion car

$$B_{n+1} = B_n \cap \overline{A_{n+1}} \subset B_n$$

D'aprés théorème limite décroissante:

$$\begin{aligned}
\exists \lim_n P(B_n) &= P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) \\
\Rightarrow P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= 1 - P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) \\
&= 1 - \lim_n P(B_n) \\
&= 1 - \lim_n P(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k})
\end{aligned}$$

or le systéme $(A_n)_n$ est mutuellement independant $\Rightarrow$ $(\overline{A_n})_n$ est mutuellement independant. Donc

$$P(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A}_k) = \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A}_k)$$

$$\Rightarrow \; P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 - \lim_n \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A}_k)$$

En effet:

$$\begin{cases} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=0}^{n} \overline{A}_k \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n \\ \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{A}_k = (\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A}_k) \cap (\bigcap_{k=n+1}^{+\infty} \overline{A}_k) \subset B_n, \quad \forall n \end{cases}$$

Donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

b/ Montre que $\sum \mathrm{P}(A_n)$ converge ssi $\sum \ln \mathrm{P}((\overline{A}_n))$ converge

" $\Rightarrow$ "

Si $\sum \mathrm{P}(A_n)$ converge $\Rightarrow \mathrm{P}(A_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\Rightarrow -\ln(1 - \mathrm{P}(A_n)) \underset{\infty}{\sim} \mathrm{P}(A_n)$

$\Rightarrow \sum \ln(1 - \mathrm{P}(A_n))$ converge

$\Rightarrow \sum \ln(\mathrm{P}(\overline{A}_n))$ converge

" $\Leftarrow$ "

$\Rightarrow \sum \ln(\mathrm{P}(\overline{A}_n))$ converge $\Rightarrow \ln(\mathrm{P}(\overline{A}_n)) \to 0$

$\Rightarrow \ln(1 - \mathrm{P}(A_n)) \to 0 \Rightarrow \mathrm{P}(A_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\Rightarrow \ \ln(\ \mathrm{P}(\overline{A_n})) = \ln(1 - \ \mathrm{P}(A_n)) \ \sim \ - \mathrm{P}(A_n) \Rightarrow \sum \ \mathrm{P}(A_n)$ converge d'où on a l'équivalence.

c/ $\mathrm{P}(A_n) \neq 1; \ \forall n$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \lim_n \prod_{k=0}^{n} \ \mathrm{P}(\overline{A}_k) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_n \prod_{k=0}^{n} \ \mathrm{P}(\overline{A}_k) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_n \ln(\prod_{k=0}^{n} \ \mathrm{P}(\overline{A}_k)) = -\infty \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_n \sum_{k=0}^{n} \ln \ \mathrm{P}(\overline{A}_k) = -\infty \\
&\Leftrightarrow \quad \sum \ln \ \mathrm{P}(\overline{A}_n) \quad div \\
&\Leftrightarrow \quad \sum \ \mathrm{P}(A_n) \quad div
\end{aligned}$$

d/ $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$.

Montre que $\mathrm{P}(B) \leq \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)\right)$?

$\leftrightarrow$

$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$; $B_n = \bigcap_{k=0}^{n} \overline{A}_k$.

$(B_n)_n$ est une suite decroissante d'évènements.

Théoréme limite decroissante $\Rightarrow$ $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\bigcap_n B_n) = \lim_n \mathrm{P}(B_n)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B) &= \lim_n \mathrm{P}(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A}_k) \\
&= \lim_n \prod_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\overline{A}_k) \\
\text{or } \mathrm{P}(\overline{A}_k) &= 1 - \mathrm{P}(A_k) \leq e^{-\mathrm{P}(A_k)} \\
\Rightarrow \mathrm{P}(B) &\leq \lim_n \prod_{k=0}^{n} e^{-\mathrm{P}(A_k)} \\
&\leq \lim_n e^{-\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(A_k)} \\
&\Rightarrow \mathrm{P}(B) \leq e^{-\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_k)}
\end{aligned}
$$

$e/$ $\sum_{n\geq 0} \mathrm{P}(A_n)$ converge; $A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n$.
Montre que $\mathrm{P}(A) = 0$?
soit $Ep = \bigcup_{n\geq p} A_n$; $\forall p \in \mathbb{N}$
$(Ep)_p$ est decroissante pour l'inclusion.
d'après théoréme limite decroissante (continuité decroissante)

$$\begin{aligned}
\exists \lim_p \mathrm{P}(E_p) &= \mathrm{P}(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} E_p) \\
\Rightarrow \lim_p \mathrm{P}(E_p) &= \mathrm{P}(A) \\
\Rightarrow \lim_p \mathrm{P}(\bigcup_{n\geq p} A_n) &= \mathrm{P}(A) \\
\text{or} \quad \mathrm{P}(\bigcup_{n\geq p} A_n) &\leq \sum_{n\geq p} \mathrm{P}(A_n) \\
\Rightarrow \mathrm{P}(A) &\leq \lim_p \sum_{n=p}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)
\end{aligned}$$

$$\text{Comme } \sum_{n\geq 0} \mathrm{P}(A_n) \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n) \underset{p\to\infty}{\to} 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(A) = 0$$

$$\mathrm{P}(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n) = 0$$

Variables Aléatoires Discrètes

(D) Variables Aléatoires réelles:

$\star$ $(\Omega, \tau, \ \mathrm{P})$ un espace probabilisé
$\star$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, v.a
$\star$ $\mathrm{P}_X(A) = \ \mathrm{P}(X^{-1}(A)); \ A \subset \mathbb{R}/X^{-1}(A) \in \tau$
$\star$ si $A = \{a\}; \ a \in \mathbb{R} \Rightarrow \ \mathrm{P}_X(A) = \ \mathrm{P}(X = a)$
$\star$ si $A = [a, b]; \ a < b \in \mathbb{R} \Rightarrow \ \mathrm{P}_X(A) = \ \mathrm{P}(a \leq x \leq b)$
$\star$ si X est une v.a et $\lambda \in \mathbb{R}$ on parle aussi

$$\lambda X \ \text{ v.a qui à } \ \omega \to \lambda X(\omega)$$

$\star$ si Y est une autre v.a on parle de

$$\begin{cases} XY \ \text{ v.a qui à } \ \omega \to X(\omega)Y(\omega) \\ X + Y \ \text{ v.a qui à } \ \omega \to X(\omega) + Y(\omega) \end{cases}$$

(D) Loi de probabilité:

X v.a discrète i.e $X(\Omega)$ est au plus denombrable (fini ou denombrable)
$X(\Omega) = \{x_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ ou bien $\{x_1, ..., x_n\}$
$P_i = P[X = x_i]$

$$\begin{aligned} \sum_i P_i &= \sum P[X = x_i] = \sum_i P(X^{-1}(\{x_i\})) \\ &= \mathrm{P}(\Omega) = 1 \\ &\Rightarrow \sum_i P_i = 1 \end{aligned}$$

(D) Fonction de répartition:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, F(x) = P[X \leq x] \leq 1$$

(D) Couple de v.a:

X et Y deux v.a discrétes ayant le même espace probabilisé $(\Omega, \tau,\ \mathrm{P})$

$$X(\Omega) = \{x_i;\ i \in I\}$$
$$Y(\Omega) = \{y_j;\ j \in J\}$$

I et J sont au plus denombrables (deux Parties de $\mathbb{N}$).

$P(X = x_i;\ \text{et}\ Y = y_i) = P_{ij}$

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P_{ij} = P_{i\cdot}$$

$$P(Y = y_i) = \sum_{i \in I} P_{ij} = P_{\cdot j}$$

$\Rightarrow \sum_{i \in I} P_{i\cdot} = 1.$
$\sum_{j \in J} P_{\cdot j} = 1$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} P_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} P_{ij} = 1$$

(D) Loi conditionnelle:

$$\begin{aligned} P(X = x_i / Y = y_j) &= \frac{P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \\ &= \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \\ P(Y = y_j / X = x_i) &= \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \end{aligned}$$

(D) Independance:

X et Y sont indépendants si

$$P[X = x_i \text{ et } Y = y_j] = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} = P[X = x_i]P[Y = y_j] \quad \forall i \in I;\ j \in J.$$